

ファイナンシャル・コンサルティングのための多期間最適資産形成モデル

枇々木 規雄

慶應義塾大学 理工学部 管理工学科

E-mail: hibiki@ae.keio.ac.jp

Multi-period Optimization Model for a Household

Norio HIBIKI

Faculty of Science and Technology, Keio University

Abstract

This paper discusses an optimization model to obtain an optimal investment and insurance strategy for a household. We describe a household, income, consumption expenditure, securities, life insurance, fire insurance and medical insurance. We formulate the multi-period optimization model in the simulated path approach.

Keywords: Multi-period optimization, financial planning, investment and insurance strategy

1. はじめに

金融機関は顧客サービスの一環として、個人または世帯が保有する資産について、どのような金融商品を購入し、将来に向けて有効活用するかのアドバイスを行うファイナンシャル・コンサルティング機能の強化に努めている。具体的には、個人または世帯は、生活を行う上でインフレに伴う実質資産価値の減少リスク、世帯主の死亡に伴う収入減少リスク、住宅の火災などに伴う損失リスク、世帯主の病気に伴う支出増加および収入減少リスクなどにさらされている。これらの様々なリスクを回避し、将来の心配をできるだけ取り除き、安定的に資産形成を行うための金融商品の提案を行うことが不可欠である。

個人の最適な投資戦略については、Merton[15], Samuelson[16], Bodie, Merton and Samuelson[12] など学術的にも古くから研究が進められている。Chen, Ibbotson, Milevsky and Zhu[13] は、資産配分に加えて、賃金収入、消費支出、生命保険を含む最適化モデルを提唱している。多期間最適化手法を用いたモデルとしては、吉田, 山田, 枇々木 [11], 枇々木, 小守林, 豊田 [8], 枇々木, 小守林 [7], 枇々木 [14] がある。枇々木, 小守林, 豊田 [8] は世帯の属性やライフサイクルを考慮し、最適な投資戦略や生命保険と火災保険の加入保険金額を決定する多期間最適化モデルの構築を行っている。数値計算によって最適戦略の特徴を考察するとともに、3つのケース世帯に対して、ファイナンシャル・コンサルティングの事例を示し、現実的な感覚とも一致する結果が得られている。枇々木, 小守林 [7] はより実践的なモデルを構築するために、枇々木, 小守林, 豊田 [8] を拡張し、世帯主が死亡した場合の ① 遺族年金の受け取り、② 住宅ローンの返済免除、③ 生活レベルの変更、の3点を加えたモデル化の方法を示している。世帯主の死亡リスクは生命保険でリスクヘッジを行っているが、これらの要因を考慮することによる追加的な効果を数値計算によって検証するとともに、住宅購入戦略に関する分析も行っている。さらに、問題の特徴を生かして、リスク尺度の計算に不必要(影響の少ない)と思われるサンプルをグルーピングすることによって数値計算を高速化させる定式化の方法を示している。枇々木 [14] はさらに、

枇々木, 小守林 [7] を拡張し、① 病気に伴うキャッシュ・フローの変化と医療保険の導入、② 保険金額が一定ではない(逡減型) 定期死亡保険のモデル化、③ 生命保険金額および医療保険金額を時点ごとに決定変数とするモデル化、④ サンプルング・エラーの影響、に対する分析を数値計算によって検証している。

枇々木ら [7, 8, 14] により、以下の結果が得られている。

枇々木, 小守林, 豊田 [8]

- (1) 世帯主の年齢が増加すると最適生命保険金額は減少する。
- (2) 最適火災保険金額はほぼ非金融資産額の損失額と等しくなる。
- (3) (下限として設定する) 期待最終富の水準は最適生命保険金額および最適火災保険金額には影響を与えない。

枇々木, 小守林 [7]

- (4) 世帯主の死亡後に遺族年金を受け取ったり、生活水準を低くするならば、最適生命保険金額やリスク資産の最適投資単位数は減少する。
- (5) 世帯主の死亡により住宅ローンが免除されると、リスク資産の最適投資単位数は減少するが、最適生命保険金額および最適火災保険金額には影響を与えない。
- (6) 住宅購入戦略は最適生命保険金額やリスク資産の最適投資単位数に影響を与える。

枇々木 [14]

- (7) 疾病発生率、治療費、賃金減額が大きくなると、目的関数値を悪化させ、最適医療保険加入単位数および平準払い保険料を増加させるが、条件付き死亡率はこれらに影響を与えない。
- (8) 最適医療保険金額は、賃金減額分と治療費の合計にほぼ等しくなる。疾病発生率が高くなっても医療保険金額は増加しない。
- (9) 逡減型死亡保険は、一定型死亡保険に比べて、平準払い保険料を劇的に減少させながら、若いときに多くの生命保険を受け取れることによって高い最終富を得ることができる。
- (10) 世帯の必要な各時点のキャッシュ・フローに合わせて、最適な生命保険受取額を設計できるモデルは、期待最終富の世帯主の死亡時点に対する影響を受けにくくすることができる。
- (11) 30 期間モデルに対してサンプルパス 5,000 本の最適化問題では、サンプルング・エラーが生じやすいが、平均値や 25% 点から 75% 点ぐらいの間に入る値は、最適解の傾向を明確に表している。

本論文ではこれらの研究成果をもとにして、ファイナンシャル・コンサルティングのための最適化モデルの構築方法をまとめて分かりやすく記述する。本論文の構成は以下の通りである。2 節では家計の最適化モデルの特徴、利用する多期間最適化手法の概要、問題の定義を示す。3 節では世帯の構成、収入、消費支出の設定について説明する。投資資産や生命保険、火災保険、医療保険についても記述し、それぞれの金融商品の持つ経済効果を明らかにする。4 節では、具体的な最適化モデルの定式化を示す。最後に 5 節で今後行う予定のモデルの拡張などについて議論する。

2. 家計の最適化モデル

2.1. 家計の最適化モデルの特徴

モデル化を行う上で考慮すべき家計の特徴を以下に示す。

(1) 世帯の個別性が強い(家計に与える要因が多岐にわたる)

日本では、結婚後すぐに、もしくは子供が生まれたら仕事を辞めて妻が専業主婦になり、夫のみが働くというのが典型的な世帯である。一方で最近では、子供が生まれても仕事を辞めずに働き続ける女性も増えてきている。住宅購入の有無や子供の数、教育投資(学校の種類)などもそれぞれである。このように世帯は個別性が強いが、最適化モデルの視点で見ると(極めて面倒であるが)、多様なケースをキャッシュ・フローの違いとしてとらえればよいから、決定変数が複雑な条件のもとで決まるような設定にしなければ、最適化モデルの構築は比較的容易である。

(2) 世帯主の存在(人的資産)の影響が大きい

家計に与える要因は多岐にわたるが、賃金の稼ぎ手である世帯主が家計に与える影響は極めて大きい。たとえば、夫のみが働き、妻が専業主婦の場合、世帯主である夫が死亡したら、賃金は途絶え、たとえ遺族年金をもらえたとしても世帯の収入は激減する。その後、妻が働き始めたとしても、現実的には専業主婦であった女性がすぐに夫と同様の賃金が得られるような再就職は難しく、低賃金にならざるを得ないであろう。また、年齢によっては再就職さえできないのが現実である。このような世帯主の死亡に伴うリスクを回避する主な方法は生命保険を購入することである。

(3) 様々なリスクが存在する

世帯主の死亡に伴う収入減少リスクの他に、住宅の火災による被害や重大な疾病による高額な医療費の支払いの可能性も世帯にとって大きなリスクである。このリスクに対しては、火災保険や医療保険でリスクを回避することができる。

(4) キャッシュ・フローを考慮した長期間にわたる資産配分問題である

家計の面から長い人生設計を立てるには、賃金による収入や消費支出などのキャッシュ・フローを考慮し、長期的な計画問題として明示的にモデル化する必要がある。キャッシュ・フローを考慮する点では年金や保険のALMのモデル化と似ているが、上記でも述べたリスクやそれに関連する保険商品を考慮する点に大きな違いがある。

(5) 様々な金融商品への対応が必要である

個人の資産運用対象としては、銀行預金、株式、投資信託、外貨など様々である。また生命保険も、定期保険や終身保険という種類だけでなく、保障期間も様々である。これらを含めて最適化問題として記述することは可能であるが、実際には問題の規模が大きくなるため、年金や保険のALMモデルと同様に、主な資産クラスに限定して問題を解くことが必要である。

2.2. 多期間最適化モデルの利用

長期的な資金運用を行う際、多期間にわたる不確実性を考慮した動的投資政策の決定を明示的にモデル化するためには、1期間モデルではなく、多期間モデルを構築する必要がある。多期間ポートフォリオ最適化問題を実際に解くためのモデルとしては、シナリオ・ツリーを用いた多期間最適化モデルが中心となって発展している。それに対して、枇々木[6]はモンテカルロ・シミュレーションを利用して不確実性を記述することによって、数理計画問題として定式化が可能なシミュレーション型多期間最適化モデルを開発している。

家計に対する多期間最適化モデルを構築する場合、シナリオ・ツリー型多期間最適化ではなく、シミュレーション型多期間最適化を利用する方が適している。その理由は保険を対象としており、それに関連する死亡率や火災発生率などは発生確率が低く、サンプルパスで記述するためには多くのパスが必要だからである。生保標準生命表 [5] によると、男 50 歳の死亡率は 0.365% であり、ある 1 本のパスのみで死亡事故が発生する場合でも、274 本のパスが必要である。これを多期間にわたってシナリオ・ツリーで記述するためには膨大なツリーを生成する必要がある。たとえば、現在の世帯主の年齢が 30 歳で 60 歳で退職する場合、30 年間にわたる長期間の最適化問題を解くことになるが、これはほとんど不可能である。したがって、このようなタイプの問題ではシミュレーション型多期間最適化手法が不可欠である。枇々木ら [7, 8, 14] においてもシミュレーション型モデルが用いられている。

2.3. 問題の定義

前述のように、世帯は個別性が強いいため、様々に問題を定義することができる。ここでは、枇々木ら [7, 8, 14] で取り扱った計画期間、消費の取り扱いと問題の構造について説明する。

(1) 計画期間

老後の必要資金を安定的に蓄えることを目的として問題を定義し、計画期間を現時点から退職時点までとする。3.1 節の世帯の定義でも説明するが、配偶者は専業主婦とするので、世帯主の退職時点が計画期間末となる。

(2) 消費の取り扱いと問題の構造

連続時間における代表的な多期間最適化問題は、消費から得られる期待効用を最大化するように最適な資産配分と消費水準を決める問題として定義し、モデル化されている¹。それに対し、枇々木らの研究 [7, 8, 14] では、住宅購入、子供の教育などの生活プランを所与として考慮しながら、退職後の必要資金を安定的に蓄えることを目的として問題を定義している。計画最終時点である退職時点の金融資産に対して、その期待値の下限制約のもとで、リスクを最小化(金融資産の CVaR を最大化)するように、最適な資産配分、保険購入金額を決めるモデルを構築している。Chen, Ibbotson, Milevsky and Zhu [13] のモデルも同様に消費を所与としているモデルである。ただし、1 期間モデルであり、生存時の 1 期間後の将来価値も含めた富の期待効用と死亡時の遺産の期待効用の加重和を目的関数として、最適な資産配分と生命保険購入額を決めるモデルを構築している。

3. モデルの設定

モデルにおける世帯の定義および想定する世帯の収入と消費支出を示す。さらに、投資資産価格や各保険の保険料、保険金額の計算方法を説明する。シミュレーション型多期間最適化手法でのモデル化を明示的に示すために、パスに依存して決まるパラメータ(確率変数)には添字の i を付けて記述する。

3.1. 世帯

世帯とは、1 人の世帯主と複数の家族(配偶者、子供など)からなる集団と定義する。世帯主のみが働き、配偶者は専業主婦とする。世帯主以外は死亡したり、重大な疾病にはかからないと仮定する。計画最終時点(計画期間数)を T とする。

¹詳しくはキャンベル, ビセイラ [1] を参照されたい。

世帯の保有資産は、有価証券などの金融資産と家屋や耐久消費財からなる非金融資産の2種類で形成されるものとし、時点 t における金融資産を $W_{1,t}^{(i)}$ 、非金融資産を $W_{2,t}^{(i)}$ と記述する。

上記の設定より世帯には、① 世帯主の死亡事故、② 世帯主の重大な疾病、③ 住宅の火災事故という3つのリスクが存在すると仮定する。世帯の収入や支出の構造は、これらのリスクが顕在化したときに変化する。以降、詳細に記述するために、上記の事由の発生の有無に関するパラメータを以下のように設定する。

$\tau_{1,t}^{(i)}$: 経路 i において、世帯主が死亡した時点で 1、その他の時点では 0 の値をとる。

$\tau_{2,t}^{(i)}$: 経路 i において、火災事故が発生した時点で 1、その他の時点では 0 の値をとる。

$\tau_{3,t}^{(i)}$: 経路 i において、世帯主の生存時点では 1、死亡した時点以降では 0 の値をとる。

$\tau_{4,t}^{(i)}$: 経路 i において、世帯主が病気になった時点で 1、その他の時点では 0 の値をとる²。

$\lambda_{1,t}$: 0 時点で生存している世帯主の t 時点での死亡事故発生率 : $\lambda_{1,t} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \tau_{1,t}^{(i)}$

λ_2 : 火災事故発生率 (時点によらず一定) : $\lambda_2 = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \tau_{2,t}^{(i)}$

$\lambda_{4,t}$: 0 時点で生存している世帯主の t 時点での疾病発生率³: $\lambda_{4,t} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \tau_{4,t}^{(i)}$

3.2. 世帯の収入

t 時点の経路 i において世帯主が生存して働いていれば、賃金 $m_t^{(i)}$ が得られる⁴。死亡すると賃金は途絶えるが、死亡時に退職金、生命保険、その後は遺族年金(遺族厚生年金と遺族基礎年金)が得られる。世帯主が死亡した場合、死亡時点 t_m 以降に受け取れる厚生年金保険(遺族厚生年金)は年齢(死亡時点)に依存し、 $a_{t_m}^{(i)}$ とする。(死亡)退職金 $e_t^{(i)}$ も年齢(勤続年数)に依存する。また、世帯主が重大な疾病にかかった場合には仕事を休む必要があるため、賃金の ν_3 倍 ($\nu_3 < 1$) が減額されると仮定する。保有する金融資産 $W_{1,t}^{(i)}$ からの投資収益、借入金、保険以外の収入(キャッシュ・イン・フロー)を $M_t^{(i)}$ とすると、以下のように記述することができる。

$$M_t^{(i)} = \tau_{3,t}^{(i)} m_t^{(i)} + (1 - \tau_{3,t}^{(i)}) a_{t_m}^{(i)} + \tau_{1,t}^{(i)} e_t^{(i)} + \mathbf{1}_{\{t=T\}} \tau_{3,T}^{(i)} e_T^{(i)} - \tau_{4,t}^{(i)} \nu_3 m_t^{(i)} \quad (1)$$

である。ここで、 $\mathbf{1}_{\{A\}}$ は A の条件が成立していれば 1、成立しなければ 0 となる定義関数を表す。

3.3. 世帯の消費支出

消費支出 $C_t^{(i)}$ は、生活消費支出 $C_{1,t}^{(i)}$ と非金融資産の購入支出(住居、家財の購入費用や補修費用) $C_{2,t}^{(i)}$ の2種類の合計と考える。この他に、火災事故発生に伴う修復費用がある。

² $\tau_{3,t}^{(i)} = 0$ ならば、 $\tau_{4,t}^{(i)} = 0$ である。

³医療保険でカバーすることが必要な治療費の高額な病気(三大疾病など)になる確率表は保険会社ごとに存在し、保険料はこの確率表をもとに計算しているはずだが、外部に公表されていない。枇々木ら[7, 8, 14]の数値分析では、疾病発生率 $\lambda_{4,t}$ を死亡率の算定に利用した生保標準生命表(1996)[4]から計算した死亡率 $\lambda_{1,t}$ の $\nu_1 (> 1)$ 倍と仮定して問題を解いている。このように設定した理由は、三大疾病は死亡原因としても代表的な病気であり、さらに病気になる確率は死亡率と同様に年齢とともに高くなるからである。

⁴世帯の賃金収入は就労者の年齢と職種によって異なるものと考え、枇々木ら[7, 8, 14]の数値分析では、厚生労働省[2]の「賃金構造基本統計調査(平成15年)」をもとに賃金収入を設定している。

3.3.1. 生活消費支出

生活消費支出を①住宅関連支出、②子供に関する支出(教育・生活支出)、③高額な治療費、④その他の生活消費支出、の4項目 $C_{1,t}^{k(i)}$ ($k = 1, 2, 3, 4$) の和として計算する⁵。

$$C_{1,t}^{(i)} = \sum_{k=1}^4 C_{1,t}^{k(i)} \quad (2)$$

(1) 住宅関連支出

住宅に関する意思決定は世帯にとって家計に影響を与える。以下に主な3通りのケースを示す。

- ① 現在は借家住まいだが、 t_e 時点で住宅を購入する予定である。ただし、夫が t_e 時点で生存しているかどうかで購入するか否かの2種類のケースを考える。
- ② 現在は借家住まいであり、将来もこのまま借家住まいの予定である。
- ③ 現在、すでに住宅を購入してローンを支払い続けている。一括払い、もしくはすでにローンを支払い終わっている場合にはローン支払額を0とすればよい。

そこで現在の状況および将来の希望を表すパラメータとして以下のものを設定する。

χ_0 : 現在、持ち家ならば1、借家ならば0の値をとる。

χ_1 : t_e 時点で住宅を購入する予定ならば1、借家のままならば0の値をとる。

χ_2 : $\chi_1 = 1$ の場合、 t_e 時点までに夫が死亡した場合でも住宅を購入するならば1、死亡した場合には購入しない場合には0の値をとる。($\chi_1 = 0$ ならば $\chi_2 = 0$)

住宅を購入する場合にはその資金を、保有する金融資産から支払う頭金と銀行などからの借入金 H_t で調達するものと仮定する。住宅購入時点 (t_e 時点) で生じるキャッシュ・フローは借入による資金 H_{t_e} の調達と住宅購入支出であり、借入金額は購入する住宅価格と頭金支払額の差額になる。また、非金融資産 $W_{2,t_e}^{(i)}$ は住宅価格の分だけ増加する。ネット・キャッシュ・アウト・フローは頭金だけであり、世帯は $t_e + 1$ 時点以降、借入の期間や金利などの条件に応じて借入金の返済をする。

住宅ローンは団体信用保険に加入していれば、世帯主の死亡により以降の返済は免除になる。ただし、世帯主が死亡後に住宅を購入した場合にはローンは免除されない。これらのことを考慮して住宅ローン支払額を計算する。住宅関連支出は以下のように計算できる。

$$C_{1,t}^{1(i)} = \chi_0 E_t^{13} + (1 - \chi_0) \left\{ \mathbf{1}_{\{t \leq t_e\}} E_t^{11} + \mathbf{1}_{\{t > t_e\}} \left(C_{1,t}^{11(i)} + C_{1,t}^{12(i)} \right) \right\} \quad (3)$$

$$C_{1,t}^{11(i)} = (1 - \chi_2) \left(1 - \chi_1 \tau_{3,t_e}^{1(i)} \right) E_t^{11} \quad (4)$$

$$C_{1,t}^{12(i)} = \chi_1 \left\{ \chi_2 \left(1 - \tau_{3,t_e}^{1(i)} + \tau_{3,t}^{1(i)} \right) + (1 - \chi_2) \tau_{3,t_e}^{1(i)} \tau_{3,t}^{1(i)} \right\} E_t^{12(i)} \quad (5)$$

ここで、 E_t^{11} は t 時点の家賃支払額、 $E_t^{12(i)}$ は t_e 時点で住宅購入した場合の t 時点の住宅ローン支払額、 E_t^{13} はすでに住宅購入している場合の t 時点の住宅ローン支払額を表す。

⁵消費支出は、世帯の賃金収入、家族構成、教育プランに依存して決定する。枇々木ら [7, 8, 14] の数値分析では、総務省 [3] の「全国消費実態調査 (平成11年)」から世帯の人数および収入別の平均支出額を、文部科学省 [9, 10] の「こどもの学習費調査 (平成14年)」と「学生生活調査 (平成14年)」から教育機関の種別による平均的な教育費を算出することで消費支出を計算している。

(2) 子供に関する支出 (教育・生活支出)

子供に関する支出 (教育・生活支出) $C_{1,t}^{2(i)}$ は以下のように計算できる。

$$C_{1,t}^{2(i)} = \sum_{k=1}^{K_0} E_t^{2k(i)} + \sum_{k=1}^{K_1} \tau_{3,t_c,k-1}^{(i)} E_t^{2k(i)} \quad (6)$$

ここで、 $E_t^{2k(i)}$ は k 番目の子供にかかる費用、 $t_{c,k}$ は将来に k 番目の子供が生まれる時点 (世帯主が $t_{c,k} - 1$ 時点で生きていれば生まれると仮定する)、 K_0 はすでに生まれている子供の数、 K_1 は将来生む予定の子供の数を表す。

(3) 高額な治療費による支出

世帯主が三大疾病 (がん・急性心筋梗塞・脳卒中) のような治療費の高額な病気にかかる、 ν_2 支出しなければならないと仮定する。

$$C_{1,t}^{3(i)} = \tau_{4,t}^{(i)} \nu_2 \quad (7)$$

(4) その他の生活消費支出

その他の支出を $E_t^{4(i)}$ とする。ただし、これは世帯主が生存しているときに想定される支出とし、世帯主が生きていれば $E_t^{4(i)}$ はそのまま、死亡後は κ 倍に抑えると考え (例: 支出を 70% に抑える場合には $\kappa = 0.7$)。したがって、その他の生活消費支出 $C_{1,t}^{4(i)}$ は以下のように計算できる。

$$C_{1,t}^{4(i)} = \left\{ \tau_{3,t}^{(i)} + (1 - \tau_{3,t}^{(i)}) \kappa \right\} E_t^{4(i)} \quad (8)$$

3.3.2. 非金融資産の関連支出

(1) 非金融資産の購入支出と保有額

非金融資産の購入支出 $C_{2,t}^{(i)}$ は消費水準に影響を受けると考える⁶。その他には t_e 時点で住宅を購入する場合には住宅価格が購入支出として追加される。非金融資産を購入することによって、その保有額は以下のように計算される。

$$W_{2,t}^{(i)} = (1 - \gamma_1) W_{2,t-1}^{(i)} + C_{2,t}^{(i)} \quad (9)$$

ただし、 γ_1 は非金融資産の償却率とする。

(2) 火災事故発生に伴う消費支出

t 時点で火災事故が発生すると、保有する非金融資産 $W_{2,t-1}^{(i)}$ の (償却後の) 一定割合 γ_0 が毀損し、その復旧のために以下のような支出 $A_t^{(i)}$ が生じると仮定する⁷。

$$A_t^{(i)} = \tau_{2,t}^{(i)} \gamma_0 (1 - \gamma_1) W_{2,t-1}^{(i)}, \quad (t = 1, \dots, T) \quad (10)$$

$A_t^{(i)}$ は非金融資産保有額に影響を与えないが、4.3節の (24) 式に示すようにキャッシュ・フローに影響を与える。

⁶ 枇々木ら [7, 8, 14] においては、所与の生活消費のある一定比率で消費すると考え、その他の生活消費支出 $E_t^{4(i)}$ の一定比率倍と想定している。

⁷ 非金融資産額は $A_t^{(i)}$ だけ支出して非金融資産を復旧 (増加) させると仮定しているので値は変わらない。

3.3.3. 投資資産

無リスク資産と n 個のリスク資産に投資する。無リスク資産の時点 $t (= 0, 1, \dots, T-1)$ における無リスク金利を r_t と表し、時点 t から $t+1$ の期間で一定とする。一方、 $j (= 1, \dots, n)$ 番目のリスク資産の時点 $t (= 0, 1, \dots, T)$ における価格を ρ_{jt} と表す。このとき時点 t における収益率 μ_{jt} は (11) 式で定義される。

$$\mu_{jt} = \frac{\rho_{jt}}{\rho_{j,t-1}} - 1, \quad (j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T) \quad (11)$$

シミュレーション型多期間最適化を用いる場合、無リスク金利 r_t 、リスク資産の収益率 μ_{jt} には様々な分布を仮定することが可能である⁸。 $\mu_{jt} (j = 1, \dots, n)$ のランダムサンプルを生成し、それを期間 t の経路 i のリスク資産 j の収益率としてリスク資産の価格を計算する。

3.3.4. 生命保険

世帯主が被保険者で、0 時点で加入し満期時点が T 時点である定期死亡保険を考える。 T 時点までに世帯主が死亡した場合に保険金を受け取ることができる。世帯主を被保険者とする生命保険は賃金が将来途絶えることに対するヘッジ機能を有する金融商品と位置付けられる。

モデル化を行う際、生保標準生命表 2007(死亡保険用)[5] の死亡率を用いて計算する⁹。生命保険の保険料は平準払いで支払われる場合を考える¹⁰。0 時点で生命保険に加入するので、0 時点から T 時点までを (平準払い) 保険料の支払期間とする。ただし、保険料はその時点で生存している被保険者のみが支払うことになるので、1 単位あたりの平準払い保険料 y_t は、(12) 式で求められる。

$$y_t = \left(\sum_{i=0}^{T-1} \frac{1 - \sum_{i=0}^t \lambda_{1,i}}{(1 + g_1)^t} \right)^{-1} (1 + \zeta_t) \quad (12)$$

ここで、 g_1 は定期死亡保険の予定利率とする。また、 ζ_t は死亡保険の純保険料に対する付加保険料比率とし、期待保険金受け取り額 1 に対して、保険料の支払いは $1 + \zeta_t$ である。

次に、単位当たりの保険金額を収支相等の原則から求めて所与とする場合と収支相等の原則も制約式として含め、最適受取金額を求める場合の 2 通りに分けて説明する。

(1) 単位当たりの保険金額 $\theta_{1,t}$ が所与の場合

保険金額は収支相等の原則に基づき、保険料収入現価に対して計算される。以下では、様々なタイプの保険に対応するために、生命保険金額が可変の場合について説明する¹¹。 t 時点で死亡したときの保険料収入現価 1 単位に対する保険金額 (保険金関数) $\theta_{1,t}$ は

$$\theta_{1,t} = \eta_{1,t} \left\{ \sum_{k=1}^T \frac{\eta_{1,k} \lambda_{1,k}}{(1 + g_1)^k} \right\}^{-1} \quad (13)$$

⁸ 枇々木ら [7, 8, 14] の数値分析では簡単のため、無リスク金利 r_t は時刻によらず一定、リスク資産の収益率 μ_{jt} は正規分布 $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ に従うと仮定している。

⁹ 枇々木ら [7, 8, 14] では、「生保標準生命表 1996(死亡保険用) 男」[4] が用いられている。

¹⁰ 一時払い、平準払いともに可能であるが、以降の定式化では煩雑さを避けるために平準払いのみを記述する。

¹¹ 一般に死亡保険の保障額は一定の場合が多く、枇々木ら [7, 8] でも世帯が受け取る保険金額は一定として問題を解いている。枇々木 [14] では可変の場合を取り扱っている。

となる。ここで、 $\eta_{1,t}$ は相対的な保険金関数を表す。 $\eta_{1,t} = 1$ (一定値) とすれば、世帯主の死亡時点にかかわらず、保険金額が一定の生命保険を表すことができる。

生命保険を1単位購入すると、世帯主は $y_t (t = 0, \dots, T-1)$ を支払い、 $\tau_{1,t}^{(i)} \theta_{1,t} (t = 1, \dots, T)$ を受け取ることになる。全保険期間を対象とするならば、収支相等の原則により自然保険料に対する期待収入現価合計は期待支出現価合計と等しくなる。しかし、保険の健全性を考えて、各時点においてそれまでの期待収入現価合計が期待支出現価合計を上回るような保険を対象として取り扱う。その条件は以下の通りである。

$$\sum_{t=1}^k \left(\frac{1 - \sum_{i=0}^{t-1} \lambda_{1,i}}{(1+g_1)^t} \right) \left\{ \frac{y_t}{1+\zeta_t} (1+g_1) - \left(\frac{\lambda_{1,t}}{1 - \sum_{i=0}^{t-1} \lambda_{1,i}} \right) \theta_{1,t} \right\} \geq 0 \quad (k = 1, \dots, T-1) \quad (14)$$

以下に示す生命表の死亡率の逆数に比例した保険金関数

$$\eta_{1,t} = \frac{1 - \sum_{i=0}^{t-1} \lambda_{1,i}}{\lambda_{1,t}}$$

はこの条件を満たし、早期に死亡した場合に保険金額が高い減少型関数となる。枇々木 [14] の中で用いられている減少線形関数 ($\eta_{1,t} = T - t + 1$) は、(14) 式の条件を満たすとは限らない。しかし、枇々木 [14] が示したように、保険金関数が一定の場合に比べて、平準払い保険料が下がるだけでなく目的関数もよくなり、さらに死亡時点ごとの条件付き期待最終富もフラットになるという性質は変わらないだろう。

(2) 各時点で最適な保険金受取金額を求める (最適保険設計問題) の場合

t 時点における生命保険金額 x_t は単位あたり生命保険金額 $\theta_{1,t}$ に単位数 u_L を掛けて求められる。すなわち、 $x_t = \theta_{1,t} u_L$ である。単位あたり生命保険金額 $\theta_{1,t}$ は所与 (パラメータ) ではなくするため、収支相等の原則を表す制約式として (15) 式を追加する。

$$u_L = \sum_{t=1}^T \phi_t x_t, \quad \text{ただし、} \phi_t = \frac{\lambda_{1,t}}{(1+g_1)^t} \quad (15)$$

k 時点までの期待収入現価合計が期待支出現価合計を上回る制約式として、(14) 式を以下のように変形し、追加する。

$$\sum_{t=1}^k \left(\frac{1 - \sum_{i=0}^{t-1} \lambda_{1,i}}{(1+g_1)^t} \right) \left\{ \frac{y_t}{1+\zeta_t} (1+g_1) u_L - \left(\frac{\lambda_{1,t}}{1 - \sum_{i=0}^{t-1} \lambda_{1,i}} \right) x_{1,t} \right\} \geq 0 \quad (k = 1, \dots, T-1) \quad (16)$$

3.3.5. 火災保険

火災事故の発生リスクに対するヘッジ手段として、世帯は1年ごとに、各時点で保有する非金融資産額に応じて保険金額を見直し、1年満期の火災保険を更新 (加入) する。1年満期の火災保険の予定利率を g_2 とすると、収支相等の原則に基づき、保険料収入現価1単位とそれに対応する保険金額 θ_2 の関係は (17) 式で表現される。

$$1 = \frac{\theta_2 \lambda_2}{1+g_2}, \quad \text{すなわち、} \theta_2 = \frac{1+g_2}{\lambda_2} \quad (17)$$

保険料収入現価1単位とそれに対応する火災保険料 y_F は、1年満期の保険であるため一時払いのみである。この場合、自然保険料と収入現価は一致するが、火災保険の純保険料に対する付加保険料比率を ζ_f とすると、単位当たりの保険料の支払いは

$$y_F = 1 + \zeta_f \quad (18)$$

となる。

枇々木ら [7, 8, 14] では火災保険の購入金額を決定変数とし、付加保険料を考慮しないで問題が解かれ、最適火災保険金額は非金融資産のほぼ毀損額になるという結果が得られている。一方、枇々木 [14] で行われたサンプリング・エラーの検証により、3.3.6項で説明する医療保険ほどではないが、各時点ごとに決定変数を設定するとサンプリング・エラーの影響が多少出ている。そこで、これらのことを考慮し、非金融資産の毀損額に対するヘッジ比率を決定変数とする定式化に変更する。償却後の非金融資産の毀損額 $\gamma_0(1 - \gamma_1) \cdot W_{2,t}^{(i)}$ ($t = 0, \dots, T - 1$) に対する火災保険のヘッジ比率を h_F とし、フルヘッジの場合の購入単位数 $\xi_0, \xi_t^{(i)}$ を

$$\xi_0 = \frac{\gamma_0(1 - \gamma_1) \cdot W_{2,0}}{\theta_2}, \quad \xi_t^{(i)} = \frac{\gamma_0(1 - \gamma_1) \cdot W_{2,t}^{(i)}}{\theta_2} \quad (t = 1, \dots, T - 1) \quad (19)$$

とするならば、 $y_F \xi_0 h_F, y_F \xi_t^{(i)} h_F$ ($t = 1, \dots, T - 1$) を支払い、 $\tau_{2,1}^{(i)} \theta_2 \xi_0 h_F, \tau_{2,t}^{(i)} \theta_2 \xi_t^{(i)} h_F$ ($t = 2, \dots, T$) を受け取ることになる。

3.3.6. 医療保険

世帯主が被保険者で、0時点で加入し満期時点が T 時点である医療保険を考える。 T 時点までに世帯主が疾病にかかった場合には何度でも保険金を受け取ることができる。医療保険は、高額な治療費の支払いや仕事を休むために失われる(減少する)賃金に対するヘッジ機能を有する金融商品と位置付けられる。

医療保険の保険料も生命保険と同様に、医療保険の1単位あたりの平準払い保険料 y_b は、その時点で生存している被保険者のみが支払うことになり、(20)式で求められる¹²。

$$y_b = \left(\sum_{t=0}^{T-1} \frac{1 - \sum_{i=0}^t \lambda_{1,i}}{(1 + g_1)^t} \right)^{-1} (1 + \zeta_b) \quad (20)$$

ただし、生命保険と同じ予定利率 g_1 を用いる。枇々木 [14] によって、付加保険料を考慮しない場合であるが、最適医療保険金額は平均的には疾病による賃金減少分と医療費の合計になるという結果が得られている。その一方で、医療保険の購入金額を各時点ごとに決定変数とするとサンプリング・エラーが出やすいため、各時点の疾病による賃金減少分と医療費の合計の平均値 $C_{B,t}$ に対するヘッジ比率を決定変数とする定式化に変更する。 $C_{B,t}$ に対する医療保険のヘッジ比率を h_B 、それに対応する購入単位数を u_B とするならば、収支相等の原則より、

$$u_B = \sum_{t=1}^T \frac{\theta_{4,t} u_B \lambda_{4,t}}{(1 + g_1)^t} = \left\{ \sum_{t=1}^T \frac{\lambda_{4,t} C_{B,t}}{(1 + g_1)^t} \right\} h_B = \psi_B h_B \quad (21)$$

を得る。 $y_b u_B$ ($t = 0, \dots, T - 1$) を支払い、 $\tau_{4,t}^{(i)} C_{B,t} h_B$ ($t = 1, \dots, T$) を受け取る。

¹²平準払い保険料は生存時に支払うので、期間が同じで生命保険と同じ予定利率 g_1 を用いれば、生命保険の平準払い保険料 y_l ((12)式)と同じになる。病気になる確率は受取保険金額に反映される。

4. 多期間最適化モデルの定式化

4.1. 記号

3節で示した記号も含めて、定式化で用いる記号をまとめて記す。

(1) 添字

j : 資産を表す添字 ($j = 1, \dots, n$)。 n は資産数を表す。

t : 時点を表す添字 ($t = 1, \dots, T$)。 T は計画期間数を表す。

i : 経路(パス)を表す添字 ($i = 1, \dots, I$)。 I は経路数を表す。

(2) パラメータ

(A) 資産変動に関するパラメータ

ρ_{j0} : 0時点のリスク資産 j の価格 ($j = 1, \dots, n$)

$\rho_{jt}^{(i)}$: t 時点の経路 i のリスク資産 j の価格 ($j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, I$)

r_0 : 0 時点(期間 1) の金利

$r_{t-1}^{(i)}$: $t-1$ 時点(期間 t) の経路 i の金利 ($t = 2, \dots, T; i = 1, \dots, I$)

(B) 生命保険、医療保険に関するパラメータ (保険料現価1円分を1単位とする)

g_1 : 死亡保険、医療保険の予定利率

ζ_l : 死亡保険の純保険料に対する付加保険料比率

y_l : 死亡保険の1単位あたりの平準払い保険料 : (12) 式

$y_{L,t}^{(i)}$: 死亡保険1単位あたりの t 時点における支払い保険料 : $y_{L,t}^{(i)} = \tau_{3,t}^{(i)} y_l$

$\theta_{1,t}$: t 時点で死亡した場合の死亡保険1単位あたり保険金額 : (13) 式

$L_t^{(i)}$: t 時点の経路 i における死亡保険の1単位あたり受取保険金額 : $L_t^{(i)} = \tau_{1,t}^{(i)} \theta_{1,t}$

ζ_b : 医療保険の純保険料に対する付加保険料比率

y_b : 医療保険の1単位あたりの平準払い保険料 : (20) 式

$y_{B,t}^{(i)}$: 医療保険1単位あたりの t 時点における支払い保険料 : $y_{B,t}^{(i)} = \tau_{3,t}^{(i)} y_b$

$C_{B,t}$: t 時点の疾病による賃金減少分と治療費の平均値(医療保険のヘッジ対象となる金額)

(C) 火災保険に関するパラメータ (保険料現価1円分を1単位とする)

g_2 : 火災保険の予定利率

ζ_f : 火災保険の純保険料に対する付加保険料比率

y_F : 火災保険1単位あたりの支払い保険料 : (18) 式

θ_2 : 火災保険の1単位あたり保険金額(1年満期) : (17) 式

γ_0 : 火災事故による保有する非金融資産の毀損率

γ_1 : 非金融資産の償却率

(D) 世帯の収支と富に関するパラメータ

$M_t^{(i)}$: t 時点の経路 i における賃金収入(退職金含む)、または遺族年金収入

$H_t^{(i)}$: t 時点の経路 i における借入金

$C_t^{(i)}$: t 時点の経路 i における消費支出

$W_{1,t}^{(i)}$: t 時点の経路 i における金融資産保有額 ($W_{1,0}$: 時点0(初期時点)の保有額)
 $W_{2,t}^{(i)}$: t 時点の経路 i における非金融資産保有額 ($W_{2,0}$: 時点0(初期時点)の保有額)
 W_E : 計画最終時点に保有する金融資産額の期待値の下限
 $L_{v,t}$: t 時点の無リスク資産の下限值。 $L_{v,t} < 0$ の場合には借り入れも可能である。

(3) 決定変数

z_{jt} : t 時点のリスク資産 j への投資単位数 ($j = 1, \dots, n; t = 0, \dots, T-1$)
 v_0 : 0 時点の現金(無リスク資産)
 $v_t^{(i)}$: t 時点の経路 i の現金(無リスク資産) ($t = 1, \dots, T-1$)
 u_L : 0 時点で加入する死亡保険の単位数
 x_t : t 時点での死亡保険の受取保険金額。
 h_F : 償却後の非金融資産の毀損額に対する1年満期火災保険の受取保険金額の割合(ヘッジ比率)
 h_B : 疾病による賃金減少分と治療費の平均値($C_{B,t}$)に対する医療保険の受取保険金額の割合(ヘッジ比率)
 $q^{(i)}$: T 時点における経路 i の保有金融資産額の β -VaR($\equiv V_\beta$) を下回る部分
 $q^{(i)} \equiv \max(V_\beta - W_{1,T}^{(i)}, 0)$ ($i = 1, \dots, I$)

4.2. 目的関数およびキャッシュ・フロー制約式

4.2.1. 目的関数

以下に示すリターンおよびリスクに関する指標に関して、目的関数もしくは制約条件に設定する。

(1) リターン指標: 期待最終富(T 時点での富の期待値)

$$\bar{W}_T = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I W_{1,T}^{(i)} \quad (22)$$

(2) リスク指標: 条件付きバリュー・アット・リスク (CVaR)

確率水準 β (例: $\beta = 0.95$) に対し、 T 時点の金融資産額が β -VaR($\equiv V_\beta$) を下回るという条件下での金融資産額の期待値をリスクと定義する。

$$\text{CVaR}_\beta = \text{Max} \left\{ V_\beta - \frac{1}{(1-\beta)I} \sum_{i=1}^I q^{(i)} \mid W_{1,T}^{(i)} - V_\beta + q^{(i)} \geq 0 \right\} \quad (23)$$

(23) 式に示す CVaR を目的関数とする場合には最大化問題として、制約条件とする場合には下限制約式を設定する¹³。

4.2.2. 収入、支出、保険によるキャッシュ・フロー

資産運用以外のキャッシュ・フローを(24)式に示す。世帯のキャッシュ・イン・フローは賃金、借入金、生命保険金、火災保険金、医療保険金であり、キャッシュ・アウト・フ

¹³ 保有資産額の条件付き期待値をリスク尺度として定義したくない(リスクの最小化問題、もしくはリスクに対する上限制約式として定義したい) 場合には、満期時点の保有金融資産額の代わりに「初期時点の金融資産額-満期時点の金融資産額」に対する CVaR を定義すればよい。定義を変更したとしても得られる結果は同じである。

ローは消費、生命保険料、火災保険料、医療保険料および火災による損失額である。\$T\$時点では保険料支払いが無いため、取り除く。

$$D_t^{(i)} = M_t^{(i)} + H_t^{(i)} - C_t^{(i)} - \mathbf{1}_{\{t \neq T\}} \left(y_{L,t}^{(i)} u_L + y_{B,t}^{(i)} \psi_B h_B + y_F \xi_t^{(i)} h_F \right) + X_t^{(i)} \\ + \tau_{4,t}^{(i)} C_{B,t} h_B - \tau_{2,t}^{(i)} \gamma_0 (1 - \gamma_1) W_{2,t-1}^{(i)} (1 - h_F) \quad (t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, I) \quad (24)$$

ここで、\$X_t^{(i)}\$ は単位当たりの保険金額が所与の場合と時点ごとに最適な受取金額を求める場合で異なり、次のように記述される。

$$X_t^{(i)} = \begin{cases} L_t^{(i)} u_L = \tau_{1,t}^{(i)} \theta_{1,t} u_L & \text{(所与の保険金関数)} \\ \tau_{1,t}^{(i)} x_t & \text{(最適保険金関数)} \end{cases} \quad (t = 1, \dots, T) \quad (25)$$

4.3. モデルの定式化

期待最終富の下限值 \$W_E\$ を保ちつつ、最終富の CVaR を最大化するモデルは以下のよう
に定式化することができる。

$$\text{最大化} \quad V_\beta - \frac{1}{(1 - \beta)I} \sum_{i=1}^I q^{(i)} \quad (26)$$

制約条件

$$\sum_{j=1}^n \rho_{j0} z_{j0} + v_0 + y_l u_L + y_b \psi_0 h_B + y_F \xi_0 h_F = W_{1,0} \quad (27)$$

$$(W_{1,1}^{(i)} =) \sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} z_{j0} + (1 + r_0) v_0 + D_1^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} z_{j1} + v_1^{(i)} \quad (i = 1, \dots, I) \quad (28)$$

$$(W_{1,t}^{(i)} =) \sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} z_{j,t-1} + (1 + r_{t-1}^{(i)}) v_{t-1}^{(i)} + D_t^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} z_{jt} + v_t^{(i)} \\ (t = 2, \dots, T - 1; i = 1, \dots, I) \quad (29)$$

$$W_{1,T}^{(i)} = \left\{ \sum_{j=1}^n \rho_{jT}^{(i)} z_{j,T-1} + (1 + r_{T-1}^{(i)}) v_{T-1}^{(i)} \right\} + D_T^{(i)} \quad (i = 1, \dots, I) \quad (30)$$

$$\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I W_{1,T}^{(i)} \geq W_E \quad (31)$$

$$W_{1,T}^{(i)} - V_\beta + q^{(i)} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, I) \quad (32)$$

$$z_{jt} \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n; t = 0, \dots, T - 1)$$

$$v_0 \geq 0$$

$$v_t^{(i)} \geq L_{v,t} \quad (t = 1, \dots, T - 1; i = 1, \dots, I)$$

$$u_L \geq 0$$

$$h_F \geq 0$$

$$h_B \geq 0$$

$$q^{(i)} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, I)$$

V_β : 符号無制約

u_L, h_F, h_B は $D_t^{(i)}$ の中にも含まれている。各時点の最適生命保険金額を求める場合には (15) 式および x_t の非負条件 ($x_t \geq 0$ ($t = 1, \dots, T$)) を追加する必要がある。また、保険の健全性を考えて、各時点においてそれまでの期待収入現価合計が期待支出現価合計を上回るような最適生命保険金額を求めるためには、(16) 式も追加しなければならない。

5. まとめ

本論文では、世帯に対するシミュレーション型多期間最適資産形成モデルについて議論した。具体的には退職時まで安定した資産形成を行うための最適投資戦略と最適な保険加入金額を同時に決定するためのモデルを構築した。世帯の収入と支出を詳細に記述するとともに、世帯が直面する世帯主の死亡事故、火災事故、重大な疾病のリスクに対するヘッジ機能を有する金融商品として生命保険、火災保険、医療保険を対象としたモデル化を行った。

本論文で示したモデルでは、① 付加保険料の考慮、② 住宅購入戦略の多様化、③ 火災保険および医療保険に対する決定変数の取り扱いの変更、④ 各時点までの期待支出現価合計に対する期待収入現価合計の超過条件の追加、という点を枇々木ら [7, 8, 14] のモデルの修正・追加をしている。今後は以下の点に関してモデルの拡張を行うつもりである。

(1) 計画期間の変更

実際には退職後に生命保険を受け取る場合や資産運用も考慮すると、必ずしも退職時点を計画期間末にする必要はない。計画期間を退職時点以降のある時点までと設定することによって、退職後の影響を長期の計画問題に取り入れることができる。

(2) 世帯の多様化

世帯主が働くだけでなく、夫婦共働き世帯も対象にする。これに伴い、配偶者に対する生命保険や医療保険もモデルの中にも含める。一般に保険期間は計画期間とは必ずしも一致するとは限らないので、より一般的に保険商品の期間を記述する。また、子供保険を対象に加えることも検討する。

(3) 消費の取り扱いと問題の構造

生活消費支出の中で贅沢品などの購入などは世帯の収入に依存する部分であり、世帯はこの部分の最大化を目的関数と考えることもできる。これは伝統的な最適消費計画問題における消費による期待効用最大化と同じ考え方である。そこで目的関数として、老後の必要資金(消費)に加えて、全体の消費の最適化を考える。これらは相反するものではなく、両者をうまく考慮してモデルを構築し直す。また、計画期末も退職時点でなければ、計画期末以降に必要な資金も考慮する。

(4) 賃金のモデル化(賃金リスクの考慮)

賃金 $m_t^{(i)}$ は時点 t とパス i に依存するが、明示的にはモデル化を行っていない。枇々木ら [7, 8, 14] の数値分析においても時間にもみ依存したデータで分析を行っている。賃金を毎月の給与部分とボーナス部分に分け、ボーナス部分は企業の業績と連動し、それは株価に現れると考え、株式収益率と相関を持たせるなどのモデル化を行う。

(5) 目的関数の変更

リスク尺度の代わりに、アップサイドポテンシャルを考慮したパフォーマンス尺度を用いたモデル化を行うことも考えられる。

(6) ソフトウェアの開発と集約モデルの構築による計算時間の短縮

ファイナンシャル・コンサルティング・ツールの中にモデルを組み込むためにはソフトウェアの開発が必須である。顧客の前でソフトウェアを用いて分析結果を迅速にフィードバックしながらコンサルティングを行ったり、様々なケース分析を行うためには高速に問題を解く必要がある。計算時間を短縮するために、対応年数はそのまま期間数を縮小するが計算精度をできるだけ保つことができる集約モデルの構築を試みる。それに加えて、実際にファイナンシャル・プランナーに使ってもらうには、モデルを精緻にするだけでなく、インターフェースやレポート機能なども充実させる必要がある。

参考文献

- [1] キャンベル, ビセイラ著, 木島正明監訳, 野村証券金融経済研究所訳: 戦略的アセットアロケーション, 東洋経済新報社, 2005.
- [2] 厚生労働省: 賃金構造基本統計調査(平成15年).
- [3] 総務省: 全国消費実態調査(平成11年).
- [4] 日本アクチュアリー会: 生保標準生命表 1996.
- [5] 日本アクチュアリー会: 生保標準生命表 2007.
- [6] 枇々木規雄: 戦略的資産配分問題に対する多期間確率計画モデル, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **44**, 2(2001), 169–193.
- [7] 枇々木規雄, 小守林克哉: 多期間最適資産形成モデル — 実践的なモデルへの拡張 —, *日本保険・年金リスク学会誌*, **2**, 1(2006), 3–31.
- [8] 枇々木規雄, 小守林克哉, 豊田暢子: 多期間最適化手法を用いた世帯の資産形成モデル, *日本保険・年金リスク学会誌*, **1**, 1(2005), 45–68.
- [9] 文部科学省: こどもの学習費調査(平成14年).
- [10] 文部科学省: 学生生活調査(平成14年).
- [11] 吉田靖, 山田泰之, 枇々木規雄: 家計の金融資産配分問題に対する多期間最適化モデル, 慶應義塾大学理工学部管理工学科 テクニカルレポート, No.02-003, 2002.
- [12] Z. Bodie, R.C. Merton and W. Samuelson: Labor Supply Flexibility and Portfolio Choice in a Life-Cycle Model, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **16**, 3–4(1992), 427–449.
- [13] P. Chen, R.G. Ibbotson, M. Milevsky, and X. Zhu, Human capital, asset allocation, and life insurance, *Financial Analysts Journal*, **62**, 1(2006), 97–109.
- [14] N. Hibiki: Multi-period optimization model for a household, and optimal insurance design, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **50**, 4(2007), 掲載予定.
- [15] R.C. Merton: Lifetime Portfolio Selection Under Uncertainty: The Continuous-Time Case, *Review of Economics and Statistics*, **51**, 3(1969), 247–257.
- [16] P.A. Samuelson: Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming, *Review of Economics and Statistics*, **51**, 3(1969), 239–246.